# Esercizi su esponenziali, coni, cilindri, superfici di rotazione

**Esercizio 1.** *Risolvere*
$$\exp\left(\exp\left(z\right)\right) = -i\,.$$

**Esercizio 2.** *Risolvere*
$$2i\exp(z)z^4 + i\exp(z)(1+\sqrt{3}i) - 2z^4 - i\sqrt{3} - 1 = 0\,.$$

**Esercizio 3.** *Risolvere*
$$\exp(z) = -\frac{2i}{1+i}\,.$$

**Esercizio 4.** *Sia data la curva di equazione*
$$\gamma : \begin{cases} x &= 2+t^2 \\ y &= 2-3t+t^2 \\ z &= 3t \end{cases}$$

*(a) Dire (giustificando la risposta) se la curva è piana.*

*(b) Scrivere le equazioni cartesiane della curva $\gamma'$ proiezione ortogonale di $\gamma$ sul piano $x-y=0$.*

**Esercizio 5.** *Siano dati la sfera $S$ di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+5=0$ ed il piano $\alpha$ di equazione $x-2y+z-2=0$. Determinare l'equazione del cono di vertice $O=(0,0,0)$ e direttrice l'intersezione della sfera $S$ con il piano $\alpha$.*

**Esercizio 6.** *Determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione della retta*
$$r : x = y = z$$
*attorno all'asse $y$.*

**Esercizio 7.** *Determinare l'equazione della superficie ottenuta ruotando la retta $r$ di equazioni*
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$
*attorno alla retta $s$ di equazioni $x=y=z$. Determinare il raggio della circonferenza di raggio minimo contenuta nella superficie precedente.*

**Esercizio 8.** *Determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione della curva*

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

*attorno all' asse $z$.*

**Esercizio 9.** *Verificare se la superficie di equazione $x^2 + y^2 + 2\,z^2 - 2\,xy - x - y = 0$ é di rotazione attorno alla retta di equazione $r : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.*

## Soluzioni

**Soluzione 1.**

Sia $\exp(z) = w$, dunque $\exp(w) = -i$, cioè $\exp(z) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dobbiamo distinguere due casi:
1) se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \geq 0$, cioè, dato che $k \in \mathbb{Z}$, se $k \geq 1$, allora

$$z = \log\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2h\pi\right), \quad h \in \mathbb{Z};$$

2) se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 0$, cioè, dato che $k \in \mathbb{Z}$, se $k < 1$, allora

$$z = \log\left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2h\pi\right), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

□

**Soluzione 2.**

$$\begin{aligned}
&2i\exp(z)z^4 + i\exp(z)(1 + \sqrt{3}i) - 2z^4 - i\sqrt{3} - 1 = \\
&i\exp(z)(2z^4 + 1 + \sqrt{3}i) - (2z^4 + 1 + \sqrt{3}i) = \\
&(i\exp(z) - 1)(2z^4 + 1 + \sqrt{3}i) = 0.
\end{aligned}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione di partenza sono date dall'unione delle soluzioni di
$a)$ $i\exp(z) - 1 = 0$ e di $b)$ $2z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0$.
Le soluzioni di $a)$ sono

$$z = \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni di $b)$ sono

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

□

**Soluzione 3.**

Poichè $\quad -\dfrac{2i}{1+i} = -i-1 \quad$ e $\quad -i-1 = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$, si ha

$$z = \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

**Soluzione 4.**

(a) I METODO: Consideriamo tre punti $P_0, P_1, P_2$ di $\gamma$ non allineati ed il piano $\alpha$ passante per questi tre punti. Poichè $\alpha$ contiene tre punti di $\gamma$, se $\gamma$ è piana allora sarà contenuta in $\alpha$. Siano ad esempio

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

L 'equazione del piano $\alpha$ è data da

$$det \begin{pmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 0, \text{ cioè } x-y-z=0.$$

Intersechiamo $\alpha$ con $\gamma$:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x = 2+t^2 \\ y = 2-3t+t^2 \\ z = 3t \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate del generico punto $P_t$ di $\gamma$ nell'equazione di $\alpha$, si ottiene l'identità $0=0$. Quindi $\forall t$, $P_t \in \alpha$ e $\gamma$ è una curva piana.

II METODO: se $\gamma$ è piana, ci deve essere un piano $\alpha$ che contiene $\gamma$. Il generico punto $P_t = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2-3t+t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$ di $\gamma$ appartiene al piano $\alpha$ di equazione $ax+by+cz+d=0$ se e solo se $P_t$ soddisfa l'equazione di $\alpha$. Cioè se

$$(2a+2b+d) + (3c-3b)t + (a+b)t^2 = 0.$$

Questa è verificata

$$\begin{cases} 2a+2b+d=0 \\ 3c-3b=0 \\ a+b=0 \end{cases},$$

quindi per $a=-b, c=b, d=0$. Quindi il piano di equazione $x-y-z=0$ contiene $\gamma$ che dunque è una curva piana.

III METODO: eliminando la $t$ nell'equazione parametrica di $\gamma$ si ottiene l'equazione cartesiana di $\gamma$:

$$\begin{cases} z^2 = 9(x-2)^2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}.$$

Quindi $\gamma$ è intersezione di due superfici, di cui una è un piano, dunque $\gamma$ è una curva piana.

(b) $\gamma'$ è l'intersezione del piano $\alpha : x - y = 0$ con il cilindro $\mathcal{C}$ che proietta $\gamma$ parallelamente alla direzione di $n_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le equazioni parametriche di $\mathcal{C}$ sono

$$\begin{cases} x = 2 + t^2 + 1 \\ y = 2 - 3t + t^2 - 1 \\ z = 3t \end{cases}$$

e l'equazione cartesiana, che si ottiene eliminando i parametri è $\mathcal{C} : 9x + 9y - 49 = -9z + 2z^2$. Quindi l'equazione di $\gamma'$ è

$$\begin{cases} 9x + 9y - 49 = -9z + 2z^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

□

**Soluzione 5.**

La direttrice è la circonferenza

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 5 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Il cono $\mathcal{C}$ che dobbiamo determinare è il luogo geometrico delle rette per l'origine e per il generico punto $P = (a, b, c) \in \Gamma$. Quindi

$$\mathcal{C} : \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 4c + 5 = 0 \\ a - 2b + c - 2 = 0 \\ x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 4c + 5 = 0 \\ a - 2b + c - 2 = 0 \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{c} = \dfrac{z}{c} \end{cases},$$

da cui otteniamo $a = \dfrac{x}{y} b$ e $c = \dfrac{z}{y} b$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$b = \frac{2y}{x - 2y + z}, \quad \text{e quindi} \quad a = \frac{2x}{x - 2y + z}, \quad c = \frac{2z}{x - 2y + z}.$$

Utilizzando questi valori nella prima equazione e semplificando:

$$5x^2 + 32y^2 + z^2 - 16xy - 2xz - 8yz = 0,$$

che é l'equazione cartesiana del cono. Notiamo che poichè il vertice coincide con l'origine si tratta di un'equazione omogenea di secondo grado nelle variabili $x, y, z$.

□

**Soluzione 6.**

Le due rette si intersecano in $O = (0,0,0)$ e quindi la superficie di rotazione è un cono $\mathcal{C}$ di vertice nell'origine. Sia $P = (t,t,t) \in r$. L'equazione della circonferenza descritta da $P$ nella rotazione attorno all'asse $y$ è data dall' intersezione del piano passante per $P$ ed ortogonale all'asse $y$ e della sfera di centro $C = (0,t,0)$ (puoi scegliere un qualsiasi punto sull'asse $y$, la scelta di questo punto particolare serve ad agevolare i calcoli) e raggio $\mathrm{d}(C,P) = \sqrt{2}t$. L'equazione parametrica del cono è data da:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + (y-t)^2 + z^2 = 2t^2 \\ y = t \end{cases} ,$$

da cui, eliminando il parametro, otteniamo $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$.
□

**Soluzione 7.**

Si tratta di due rette sghembe. Sia $P = (1,2,c) \in r$. La circonferenza descritta da $P$ nella rotazione attorno alla retta $s$ è data dall'intersezione del piano $\alpha$ passante per $P$ ed ortogonale alla retta $s$ con la sfera di centro $O = (0,0,0)$ (va bene un qualsiasi punto sull'asse di rotazione) e raggio $\mathrm{d}(O,P) = \sqrt{a^2+b^2+c^2 = 5+c^2}$. Dunque l'equazione parametrica della superficie di rotazione è

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 5+c^2 \\ x+y+z = 3+c \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 5+(x+y+z-3)^2 \\ c = x+y+z-3 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Si ottiene quindi l'equazione cartesiana della superficie desiderata:

$$xy + xz + yz - 3x - 3y - 3z + 7 = 0.$$

Si tratta di un iperboloide a una falda, avente per asse la retta $s$.
Per determinare il raggio della circonferenza di raggio minimo, è sufficiente determinare il punto della retta $r$ che descrive il raggio minore attorno a $s$. Intersechiamo il piano $x+y+z = 3+c$ con la retta $s$:

$$\begin{cases} x+y+z = 3+c \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{c}{3} \\ y = 1+\frac{c}{3} \\ z = 1+\frac{c}{3} \end{cases} .$$

La distanza dal punto $(1,2,c)$ della retta $r$ è

$$\sqrt{\left(1+\frac{c}{3}-1\right)^2 + \left(1+\frac{c}{3}-2\right)^2 + \left(1+\frac{c}{3}-c\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}\,c^2 - 2\,c + 2}.$$

La funzione $f(c) = \frac{2}{3}\,c^2 - 2\,c + 2$ assume minimo per $c = \frac{3}{2}$, quindi:

$$\text{raggio minimo} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

□

**Soluzione 8.**

La curva $\gamma$ è una curva piana, in particolare è la parabola $z = x^2$.
Sia $P = (t, 0, t^2) \in \gamma$. L' equazione cartesiana della superficie di rotazione si ricava da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + t^4 \\ z = t^2 \end{cases},$$

da cui $x^2 + y^2 = z$ (si tratta di un paraboloide di rotazione).

□

**Soluzione 9.**

Per verificare se si tratta di una superficie di rotazione attorno alla retta $r$ possiamo considerare la curva $\gamma$ che si ottiene intersecando la superficie con il piano $x = y$ (è la scelta più conveniente per i calcoli, in generale è possibile considerare qualsiasi piano contenente la retta $r$):

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2\,z^2 - 2\,xy - x - y = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 - x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Sia $P = (a, b, c) \in \gamma$, l'equazione della superficie che si ottiene ruotando $\gamma$ attorno alla retta $r$ si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ c^2 = a \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2\,a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2\,a^2 + a \\ c^2 = a \\ a = b \end{cases},$$

da cui si ricava l'equazione della superficie di rotazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{x+y}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2\,z^2 - 2\,xy - x - y = 0\,;$$

La superficie coincide con $S$ che quindi è una superificie di rotazione attorno alla retta data.
□