Esercizio 1

Verificare se le seguenti applicazioni sono lineari:

a. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 1 \\ x_1 + x_2 \end{vmatrix}$

b. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ x_1^2 \end{vmatrix}$

c. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{vmatrix}$

d. $T : P_1[t] \to P_2[t]$ tale che $p(t) \mapsto tp(t)$

e. $T : P_2[t] \to P_1[t]$ tale che $p(t) \mapsto p'(t)$

b. $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_2 - x_1 & x_3 \\ x_3 - x_1 & x_1 \end{vmatrix}$

Esercizio 2

Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$T(e_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad T(e_2) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{vmatrix} \quad T(e_3) = \begin{vmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Questa applicazione è univocamente determinata? Calcolare $T \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix}$.

Esercizio 3

Data l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_4[t]$ tale che

$$T(1) = 1, \quad T(t) = t, \quad T(t^2) = t^3 + t^2, \quad T(t^3) = t^4.$$

Verificare che T è lineare e calcolare $T(t^3 - 6t^2 + 2t + 4)$.

Esercizio 4

Determinare un' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker T = \mathbb{R}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$.

Tale applicazione è unica?

Esercizio 5

Sia $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_4$ l'applicazione $T(p) = \begin{vmatrix} p(-1) \\ p(2) \\ p(1) \end{vmatrix}$. T è lineare? Dimostrare che T è surgettiva. Calcolare $T^{-1}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$.

Esercizio 6

Data la seguente applicazione lineare $T\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_3 + 2x_4 \\ -x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \end{vmatrix}$, verificare se T è surgettiva.

Esercizio 7

Determinare la matrice A tale che $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è così definita:

$$L_A(e_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \quad L_A(e_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad L_A(e_3) = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad L_A(e_4) = \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 8

Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti vettori

$$u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \quad u_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

i) Trovare una base $\mathcal{B}$ di $Span(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

ii) Determinare l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4$ così definita:

$$T(e_1) = u_1, \quad T(e_2) = u_3, \quad T(u_2) = u_1 + u_2, \quad T(e_4) = u_2.$$

iii) Estendere $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

iv) Sia $W = Span \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix} \right)$. Trovare equazioni parametriche per U e per W.

v) Trovare base e dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$.

Esercizio 9

Consideriamo l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$T(e_1 + e_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad T(e_1 + e_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad T(e_1 + e_2 + 2e_3) = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Verificare se T è surgettiva. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = \begin{vmatrix} 2k \\ k-1 \\ 1 \end{vmatrix}$ appartiene a Im T.

Esercizio 10

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$T(e_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad T(e_2) = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad T(e_3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad T(e_4) = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

Determinare, se possibile, un'applicazione lineare g tale che $f \circ g = 0$ e dim ker $g = 2$.